nie wykracza poza racjonalną, świadomą i planową działalność nauczyciela. Dlatego możemy żądać od niego rozwijania matematycznych intuicji ucznia, przy zachowaniu harmonii między intuicyjnymi i formalnymi elementami metody matematycznej w ujęciu dostępnym uczniowi.

Aby jednak móc racjonalnie te zagadnienia rozważać, trzeba niektóre terminy, którymi dotąd posługiwaliśmy się w sposób dość ogólnikowy, sprecyzować tak, aby ich sens w zastosowaniu do nauczania szkolnego stał się bardziej konkretny. W szczególności trzeba sobie uświadomić, w jakim znaczeniu można tu mówić o rozumowaniu intuicyjnym w przeciwstawieniu do rozumowania formalnego, w skromnym zakresie naiwnej jeszcze matematyki szkolnej. Należy także zilustrować te pojęcia konkretnymi przykładami i rozważyć środki dydaktyczne sprzyjające harmonijnemu rozwojowi zarówno myślenia intuicyjnego, jak i formalnego ucznia szkoły podstawowej i średniej.

6.2. Wnioskowanie empiryczne, rozumowanie intuicyjne i rozumowanie formalne w nauczaniu matematyki

6.2.1. Odróżnimy przede wszystkim często identyfikowane niesłusznie wnioskowanie empiryczne od rozumowania intuicyjnego. Terminu „wnioskowanie empiryczne" będziemy używać na oznaczenie dwóch różnych sytuacji:

1° Uczeń obserwuje fizyczne stosunki przestrzenne lub ilościowe, występujące w jego naturalnym otoczeniu, w modelu lub na rysunku i bezpośrednio je matematyzując, to jest opisując w terminach matematycznych to, co widzi lub stwierdza doświadczeniem, formułuje hipotezę matematyczną.

2° Uczeń wykonuje ciąg prób matematycznych (np. obliczeń) i dostrzegając pewną prawidłowość w rezultatach tych prób formułuje hipotezę matematyczną, a więc stosuje metodę indukcji tak, jak ją stosuje przyrodnik.

Przykłady empirycznego wnioskowania pierwszego rodzaju podałam już poprzednio w rozdziale 4. Obecnie chcę zwrócić uwagę na empiryzm drugiego rodzaju, na indukcyjne wnioskowanie w samej matematyce.

Poprawnie indukcyjnie rozumuje uczeń, który mając za zadanie obliczyć sumę:

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \quad + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

znajduje kolejno:

$$s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_2 = \frac{2}{3}, \quad s_3 = \frac{3}{4}, \quad s_4 = \frac{4}{5},$$

dostrzegając „prawidłowość" w tym ciągu oraz formułując przypuszczenie: „to będzie wzór

$$s_n = \frac{n}{n+1}.$$

W dalszym ciągu następuje weryfikacja tego przypuszczenia oparta na twierdzeniu o indukcji zupełnej.

Jest to empiryzm w samej matematyce, a nie w dziedzinie jej fizycznych modeli.

Inną, ale w istocie rzeczy podobną sytuację stwarzamy, gdy w różnych momentach kursu geometrii eksponującego pojęcia izometrii rozwiązujemy zadania z zastosowaniem wiadomości o symetralnych boków trójkąta, dwusiecznych kątów trójkąta, środkowych trójkąta oraz twierdzenia: „nietożsamościowa izometria mająca dwa punkty stałe jest symetrią osiową". Będą to zarazem wstępne ćwiczenia do klasyfikacji izometrii. Zapytujemy, np., jaką izometrią jest złożenie symetrii względem symetralnych a, b, c boków $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ w ΔABC? Uczniowie łatwo znajdą dwa stałe punkty tego przekształcenia, punkt O przecięcia symetralnych i punkt B, bowiem:

$$S_c S_b S_a(B) = S_c S_b(C) = S_c(A) = B.$$

Uczniowie stwierdzą też, że przekształcenie to nie jest tożsamością, bo np. nie może być $S_c S_b S_a(A_1) = A_1$, gdzie A_1 jest środkiem odcinka $\overline{BC}$, gdyby bowiem tak było, to byłoby też $S_c S_b(A_1) - A_1$, $S_b(A_1) = S_c(A_1)$ i $b = c$. Zatem $S_c S_b S_a$, jako izometria nietożsamościowa mająca dwa punkty stałe O, B, musi być symetrią względem osi OB.

Podobny problem pojawi się i zostanie rozwiązany w związku z rozważaniem dwusiecznych kątów trójkąta. W każdym z tych przypadków stwierdza się, że złożenie pewnych trzech symetrii względem osi przecinających się w jednym punkcie jest symetrią osiową. Czy kryje się w tym jakieś ogólniejsze twierdzenie? Zagadnienie to zostanie rozważone dokładnie później w związku z klasyfikacją izometrii. Problem pojawił się jednak już wcześniej w różnych sytuacjach szczególnych i podobnych. Jest to przykład na indukcyjne powstawanie ogólniejszego zagadnienia: stwierdzamy pewną regularność w serii podobnych przypadków i pytamy, czy nie są to szczególne przypadki ogólniejszego twierdzenia.

6.2.2. W obu przypadkach — przy postępowaniu poprawnym — uczniowie stwierdzają: „być może tak jest", ale wcale nie uświadamiają sobie żadnej idei wyjaśniającej, dlaczego tak „powinno być".

Takie idee właśnie są charakterystyczne dla rozumowania intuicyjnego. Obserwujemy to już, gdy dwunastoletni uczeń, nie mając przed sobą żadnego rysunku, z wiadomości, że prostokąt o bokach długości a, b zawiera się w drugim prostokącie, którego boki mają długości c, d (przy czym wzajemne położenie boków jednego i drugiego prostokąta nie jest ustalone, mogą być nierównoległe), wysuwa bezpośrednio wniosek, że $a \cdot b \leqslant c \cdot d$. Oczywiście poprawny dowód tego twierdzenia na tym poziomie nie byłby łatwy. Uczeń wypowiada swą tezę z poczuciem pełnej oczywistości nie dlatego, że *widzi*, ale dlatego, że *wie*, przy czym *wie* nie tylko „jak jest", ale „dlaczego tak musi być". Stwierdza: „jak ten prostokąt jest w drugim, to *musi* mieć pole mniejsze". Matematyk nie uzna tego za „rozumowanie". Takie stwierdzenie, że „coś *musi* zachodzić", nie jest dowodem; wiele kłopotu sprawiałby poprawny dowód faktu oczywistego dla ucznia. Niemniej uczeń rozumuje i jest to specyficzne rozumowanie intuicyjne, oparte na przesłankach, co do których nie ma on wątpliwości, których nie umiałby zapewne sprecyzować i w których zostały jakby skoncentrowane różne jego przedmatematyczne doświadczenia (porównywanie i mierzenie wielkości).

Intuicyjnie rozumuje uczeń, który szukając wzoru na n-ty wyraz postępu arytmetycznego", wypisuje kilka pierwszych wyrazów tego postępu: $a_2=a+r$, $a_3=$ $=a+r+r=a+2r$, $a_4=a+2r+r=a+3r$, $a_5=a+3r+r=a+4r$ i nagle stwierdza: „już wiem, to tak musi być i dalej, zawsze dodaję po jednym r. to musi być $a_{10}=$ $=a+9r$, a więc ogólnie $a_n+(n-1)\cdot r$". Rozumowanie ucznia nie jest formalne. Nie jest też empiryczne, co wyraźnie widzimy, analizując odpowiedź innego ucznia, który podobnie jak poprzedni oblicza kilka pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego i zauważa: „w drugim wyrazie występowało jedno r, w trzecim $2r$, w czwartym $3r$, to byłoby zgodne z wzorem $a_n=a_1+(n-1)r$". Uczeń rozumuje tu tak jak przyrodnik: doszukuje się ogólnego prawa obejmującego poszczególne znane przypadki. Stwierdza, że „tak jest", ale nie zastanawia się nad tym, „dlaczego tak musi być", co tak silnie interweniuje w myśleniu jego kolegi, który przeprowadzony następnie ścisły, bo oparty na indukcji matematycznej, dowód twierdzenia o ciągu arytmetycznym uważa za niepotrzebną formalność, bowiem ten dowód już niczego do jego przekonania nie dodaje; jest w istocie rzeczy tylko zalegalizowaniem jego intuicyjnego rozumowania. W drugim przypadku dowód ścisły jest dla ucznia potrzebną weryfikacją jego empirycznej, wysnutej z obserwacji kilku szczególnych przypadków hipotezy. Przykład ten ilustruje wyraźnie różnicę między intuicyjnym rozumowaniem i empirycznym wnioskowaniem, które przyjmuje się często za punkt wyjścia w nauczaniu matematyki. Gdy uczeń mówi: „i tak dalej", to może to powiedzenie wyrażać zarówno konstatację empiryczną tylko, jak i głębokie przekonanie i jasne ujęcie „jednym chwytem myśli" całego nieskończonego ciągu operacji, oparte na świadomości rekurencji. „I tak dalej" w tym ostatnim sensie pojawia się w rozumowaniach uczniów bardzo często tam, gdzie zastosowano definicję rekurencyjną jakiegoś terminu.

Taką właśnie sytuację obserwujemy, gdy omawiamy izometrie parzyste i nieparzyste i ich związek z orientacją płaszczyzny. Uczeń sporządza chorągiewkę z jednej strony białą, a z drugiej czerwoną. Obrysowuje chorągiewkę na kartce papieru, otrzymując wykreśloną figurę f. Gdy chorągiewkę nałoży na narysowaną figurę, widzi białą stronę chorągiewki. Przekształca następnie f przez symetrię względem pewnej osi a; otrzymuje rysunek figury $f_1=S_a(f)$. Gdy nałoży chorągiewkę na rysunek f_1, widzi czerwoną stronę chorągiewki. Ta obserwacja wystarcza do intuicyjnego rozstrzygnięcia zagadnienia. „Jaką stronę chorągiewki zobaczymy, gdy nałożymy ją na rysunek figury

$$f_k=S_{a_k}\dots S_{a_2}S_{a_1}(f)\text{''}$$

Każda symetria „zmienia stronę chorągiewki", odpowiedź zależy więc od tego, czy k jest parzyste czy nieparzyste. Odpowiedź jest oczywista; jest oparta na intuicyjnym — nieformalnym — rozumowaniu (ale nie na odgadywaniu), odwołującym się do rekurencji. Równocześnie uczeń uświadania sobie intuicyjnie fakt fundamentalny, że żadnej izometrii parzystej nie można przedstawić w postaci jednej symetrii lub w postaci iloczynu nieparzystej liczby symetrii. Weryfikacja dedukcyjna tych intuicyjnych tez jest konieczna, niemniej jedna konkretna obserwacja wystarczyła już do uogólnienia występującego ze szczególną oczywistością w myśli ucznia.

To poczucie oczywistości towarzyszące rozumowaniu intuicyjnemu wyraża się w tym, że uczeń wypowiadając jakąś tezę nie tylko stwierdza: „tak jest", ale stara się po swojemu wyjaśnić „dlaczego tak musi być" (czasem jedno i drugie jest zresztą błędne).

Inny rodzaj intuicyjnego rozumowania charakteryzuje się tym, że wypowiadane twierdzenie traktowane jest jako hipoteza, oparta na przeświadczeniu, że „tak powinno być".

Na przykład uczeń odkrywa „zasadę analogii" między pojęciami planimetrii i stereometrii w operacji „podnoszenia wymiaru o 1", Mówi: „sześcian w przestrzeni — to kwadrat w płaszczyźnie, kwadrat w przestrzeni — to odcinek w płaszczyźnie, kula w przestrzeni — to koło w płaszczyźnie". I sugeruje, że wobec tej odpowiedniości wzory na pole sfery i objętość kuli *„powinny by powstawać odpowiednio z wzorów na długość okręgu i pole koła przez podniesienie wymiaru"*. Zatem z wzoru $o=2r\pi$ powinien wynikać wzór na pole sfery $s=(2r)^2\pi$, z wzoru $k=r^2\pi$ — wzór $v=r^3\pi$. Pierwszy z tych hipotetycznych wzorów jest prawdziwy, drugi fałszywy. Niemniej uczeń nie zaproponował ich w wyniku bezmyślnego zgadywania, ale przeprowadził logiczne rozumowanie sui generis oparte na dostrzeżonej analogii w strukturze.

Myśl, że ze względu na analogię w strukturze „tak powinno być", jest rzeczywiście źródłem wielu matematycznych idei i pomysłów. W tej formie intuicji kryje się chyba jakiś bardzo istotny element matematycznego twórczego myślenia, podobnie zresztą jak w intuicyjnym odczuciu, że ze względu na analogię w strukturze „tak nie powinno być". Mówił o tym H. Lebesgue: „Gdy protestujemy: to rozumowanie jest na pewno fałszywe! — to być może czynimy to czasem dlatego, że dostrzegamy absolutnie uderzającą sprzeczność z tym, co dobrze znamy, ale być może i dlatego, że brak nam jest dostatecznej zgodności, dostatecznej harmonii między tym, co znamy, i otrzymanym rezultatem, dlatego że nie byłoby to dostatecznie pięknie, lub rzadziej — że byłoby to zbyt piękne.

Krótko mówiąc — zaufanie pojawia się, gdy rezultat zgadza się z tym, czego oczekiwaliśmy. Byłaby to podstawa jednak bardzo niepewna dla naszego zaufania, gdybyśmy nie mieli pewnych środków kontroli".[1]

Analogia w strukturze — to dla ucznia właśnie dostępny mu rodzaj harmonii. Uczeń, który jest zdolny ją odkryć, mimo popełnionych błędów zasługuje na uwagę i szczególną opiekę. Jest on bowiem zdolny również do pewnego rodzaju odwagi matematycznej, bardzo rzadko spotykanej w szkole. Rozwijanie tego rodzaju intuicji jest zarazem rozwijaniem odwagi matematycznej uczniów, koniecznej dla zainteresowania ich matematyką i pobudzania do samodzielnego wysiłku.

6.2.3. Omawiając problem matematyzacji konkretnych sytuacji (4) zwróciłam uwagę na to, że intuicyjne pojęcie może się pojawić na tle odpowiednio przez nauczy-

---

[1] *Les Entretiens de Zurich*, op. cit., s. 119.

ciela pokierowanego eksperymentu fizycznego. Podobnie ogólna idea rozumowania może się pojawić już w toku indukcyjnego rozpatrywania szczególnych przypadków w samej matematyce.

Rozwiązując zadania z zastosowaniem własności izometrii możemy z uczniami rozważać grupę obrotów wielokąta foremnego dokoła jego środka symetrii. Rozpatrujemy np. kwadrat. Ile różnych obrotów liczy grupa obrotów kwadratu? Jakie to są obroty? Jakie można by w tej grupie wyróżnić podgrupy? Okaże się, że grupa obrotów kwadratu dokoła jego środka symetrii jest rzędu 4 (obroty o 0°, 90°, $180^\circ = 2 \cdot 90^\circ$ i $270^\circ = 3 \cdot 90^\circ$) oraz że można w niej wyróżnić dwie różne od niej podgrupy: rzędu 1 (obrót o 0°) i rzędu 2 (obroty o 0° i o $180^\circ = 2 \cdot 90^\circ$). Przeprowadzamy podobne badania w pięciokącie foremnym, sześciokącie foremnym, w dziesięciokącie foremnym. Uczniowie stwierdzą w wyniku konkretnych prób, że w pierwszym przypadku jedyną podgrupą różną od całej grupy rzędu 5 jest grupa rzędu 1 (obrót o 0°); w drugim rząd całej grupy jest 6 i można w niej wyróżnić tylko trzy różne od niej podgrupy: rzędu 1 (obrót o 0°), rzędu 2 (obroty o 0° i $180^\circ = 3 \cdot 60^\circ$), rzędu 3 (obroty o 0°, $120^\circ = 2 \cdot 60^\circ$, $240^\circ = 4 \cdot 60^\circ$); w trzecim przypadku rząd całej grupy jest 10 i można wyróżnić w niej tylko trzy różne od niej podgrupy: rzędu 1 (obrót o 0°), rzędu 2 (obroty o 0° i $180^\circ = 5 \cdot 36^\circ$), rzędu 5 (obroty o 0°, $72^\circ = 2 \cdot 36^\circ$, $144^\circ = 4 \cdot 36^\circ$, $216^\circ = 6 \cdot 36^\circ$ i $288^\circ = 8 \cdot 36^\circ$). Racjonalne, planowe poszukiwanie podgrup w tych przypadkach wyrazi się w szukaniu obrotu wielokąta, którego pewna krotność dałaby obrót zerowy (pełny) i w uświadomieniu sobie, że tylko taki obrót może być przyjęty na „najmniejszy, niezerowy obrót podgrupy". Zdanie sobie sprawy z tej strategii prowadzi od razu do ogólniejszego wniosku: **rząd podgrupy grupy obrotów wielokąta foremnego dokoła jego środka symetrii musi być dzielnikiem rzędu całej grupy, a więc dzielnikiem liczby boków wielokąta.** Uczniowie odkryją więc i udowodnią zarazem, już w toku poszukiwania odpowiedzi na zadane im konkretne i szczegółowe pytanie, nie tylko szczególny przypadek twierdzenia Lagrange'a (rząd podgrupy grupy jest dzielnikiem rzędu tej grupy), ale i twierdzenie doń odwrotne (prawdziwe w przypadku skończonej grupy cyklicznej), a więc łącznie twierdzenie: grupa obrotów n-kąta foremnego względem jego środka symetrii ma podgrupę rzędu m wtedy i tylko wtedy, gdy m jest dzielnikiem n.

6.2.4. Myśląc o rozumowaniu formalnym w nauczaniu szkolnym, nie myślimy oczywiście o rozumowaniu sformalizowanym. Mamy natomiast na uwadze rozumowanie uważane w praktyce matematycznej za wystarczająco ścisłe. Matematyk zadowala się pewnym optimum precyzji, które nie jest równoznaczne z maksimum ścisłości. To optimum jest uwarunkowane różnymi czynnikami. Zależy ono od tematu i zawiłości zagadnienia, jak również od tego, czy mieści się ono w dziedzinie już dobrze zbadanej, czy właśnie zupełnie nowej. Jest poza tym regulowane zdrowym rozsądkiem i doświadczeniem osobistym i grupowym, a nawet pewnym obyczajem naukowym, panującym w danym etapie historycznego rozwoju matematyki. Optimum precyzji matematycznego rozumowania na poziomie szkolnym nie może być też absolutnie z góry zdefiniowane. Zależy ono oczywiście od wieku ucznia i jego zaawansowania w formalnym rozumowaniu oraz od środków logicznych, którymi już rozporządza. Zależy również od rozwoju dydaktyki, która odkrywa coraz to nowe środki wyrazu myśli matematycznej ucznia, coraz to bardziej odpowiadające zarówno jego możliwościom, jak i naukowym wymaganiom (np. język mnogościowy, grafy).

Matematyczne rozumowanie — nie sformalizowane — zawiera zawsze wiele skrótów i nie dość precyzyjnie uzasadnionych ogniw. Jednakże matematyk ma świadomość, że są to tylko skróty, które nietrudno byłoby rozwinąć, oraz wie, jak to można by było zrobić. Dopuszcza je bez naruszania uczciwości naukowej.

Mówiąc o optimum precyzji w rozumowaniach szkolnych, myślimy również o pewnej uczciwości wobec myśli matematycznej ucznia. Za naruszenie tej zasady należy uznać prześlizgiwanie się nad istotnymi lukami w rozumowaniu, takimi że ich uzupełnienie nie byłoby w ogóle możliwe na poziomie ucznia, ukrywanie ich przed uczniami i przedstawianie im pseudodowodu jako wzoru matematycznego rozumowania. W takich przypadkach uczciwość matematyczna i pedagogiczna nakazuje uświadomienie uczniom pominiętego ogniwa, poinformowania ich o tym, że dowód został przeprowadzony i jest znany, i wyjaśnienie pominięcia tego dowodu jego trudnością czy niemożliwością przedstawienia go w ramach szkolnego kursu. Niedopuszczalne są skróty, które w istocie rzeczy pokrywają błędne koło, wynikające z nieokreślenia podstawy rozumowania.

Ten postulat kieruje naszą uwagę w stronę kryteriów uznawania tez matematycznych, które to kryteria muszą być stopniowo przez ucznia poznawane i stopniowo coraz to precyzyjniej rozumiane i stosowane. Takim podstawowym kryterium jest kryterium wywiedlności danego twierdzenia z określonego zespołu tez wyjściowych, w istocie rzeczy więc z jakiejś podstawy aksjomatycznej. Można by oczywiście zarzucić temu stwierdzeniu, że nie uwzględnia się w nim faktów historycznych, tj. rozwoju wielkich teorii matematycznych przed ich aksjomatyzacją oraz praktyki matematyków, prowadzących swe badania bez oglądania się w konkretnej sytuacji na aksjomatykę. Zarzut ten polegałby jednak na nieporozumieniu. Student rozwiązujący w ramach analizy klasycznej jakieś zagadnienie nie myśli i nie musi myślec o aksjomatyce. Tym niemniej rozwiązanie przez niego podane będzie uznane za poprawne, jeżeli w ostatecznej weryfikacji okaże się tezą teorii liczb rzeczywistych, opartej na definicji struktury ciała zupełnie uporządkowanego i ciągłego.

Ta struktura może być zdefiniowana bezpośrednio aksjomatycznie na gruncie teorii mnogości lub konstruowana stopniowo od liczb kardynalnych począwszy również na gruncie teorii mnogości, niemniej dla analizy klasycznej taka podstawa istnieje i z niej są wywiedlne twierdzenia analizy. Matematyk może w swych badaniach korzystać z różnych teorii równocześnie. Wtedy podstawa jego rozumowania może być bardzo złożona, krzyżują się w niej różne podstawowe struktury, definiowalne aksjomatycznie, niemniej potrafi on tę bazę swych poszukiwań wskazać, ponieważ bez tego nie można by rozstrzygnąć, czy jego rozumowanie jest poprawne, czy jego tezę można uznać.

Będziemy mówić, że uczeń rozumuje f o r m a l n i e, jeżeli świadomie stara się wywieść w drodze logicznych inferencji pewną tezę z określonego zespołu innych tez, które w danej sytuacji przyjęto już jako uznane intuicyjnie lub udowodnione poprzednio. Może to mieć miejsce zarówno w ramach lokalnie dedukcyjnej organizacji materiału nauczania (tylko pewne fragmenty kursu organizowane dedukcyjnie z stopniowym rozszerzaniem zakresu tej dedukcji) jak i w ramach globalnie dedukcyjnej organizacji kursu matematyki. Dotyczy to także zarówno twierdzeń teorii, jak i prostych zadań rozwiązywanych przez ucznia samodzielnie. Rozwiązując zadanie rachunkowe: „oblicz objętość stożka równobocznego wpisanego w kulę o promieniu r", uczeń powinien mieć tę samą świadomość metodologiczną, którą mu staramy się przyswoić dowodząc twierdzenia Pitagorasa: odpowiedź na postawione pytanie (w danym przypadku wzór na objętość stożka) może być uznana za poprawną, jeżeli się ją uda wywieść „rozumowaniem logicznym" z uznanych poprzednio twierdzeń i definicji w ramach arytmetyki i geometrii.

Jednym z zasadniczych warunków tej świadomości metodologicznej, której rozwinięcie jest ważnym celem nauczania matematyki, jest **prawidłowe rozumienie przez ucznia roli definicji matematycznej**. Poprawna dedukcja wymaga bowiem zdyscyplinowanego posługiwania się definicją. Brak tej dyscypliny formalnej w myśli ucznia przejawia się rozmaicie, między innymi także w dużych trudnościach, z jakimi spotyka się on w dedukcyjnej geometrii.

Wynikają one w dużej mierze z tego, że uczniowie w toku rozumowania nie korzystają świadomie z definicji, ale z intuicyjnych obrazów odnośnych pojęć, przekraczając od razu tekst definiensu, gdy myślą o definiendum. Spotykamy tu paradoks dydaktyczny. Im bardziej starannie i wszechstronnie pod względem poglądowym przygotujemy definicję geometryczną, tym więcej trudności natury metodologicznej będzie miał uczeń, gdy to pojęcie stanie się przedmiotem dedukcji. Im więcej bowiem uczeń „wie" intuicyjnie o danym przedmiocie, tym trudniej mu o tej całej „wiedzy" formalnie jeszcze nie zalegalizowanej zapominać, gdy ma w toku rozumowania poprawnie korzystać z definicji. Na przykład, gdy rozważa w geometrii proste równoległe zdefiniowane jako proste zawarte w jednej płaszczyźnie, rozłączne lub identyczne, to nie wolno mu w toku rozumowania powoływać się na to, że są to proste w każdym punkcie „równo odległe", dotąd, dokąd odpowiednie twierdzenie metryczne o tych odległościach nie zostanie udowodnione. Jeżeli więc chcemy najpierw rozwinąć geometrię afiniczną, jeżeli nie wprowadziliśmy żadnych aksjomatów metrycznych geometrii, chcielibyśmy, aby uczeń o tych odległościach intuicyjnie rozumianych zapomniał. Jednakże od samego początku nauczania matematyki właśnie i przede wszystkich własności metryczne równoległych szczególnie starannie przyswajano uczniowi i utwierdzano je poglądowo odpowiednimi konstrukcjami i rachunkami (w szkole podstawowej definiuje się bardzo często dwie proste równoległe jako dwie proste mające wspólną prostopadłą). Rozumienie równoległych w sensie afinicznym wymaga od ucznia świadomego wyeliminowania tych wszystkich przedstawień poglądowych i posługiwania się terminem „proste równoległe" tylko w sensie afinicznej definicji, wymaga więc jasnej świadomości metodologicznej, że ten sam model może być potraktowany rozmaicie z punktu widzenia równych struktur.

Poglądowe nauczanie matematyki w szkole ułatwia więc, ale równocześnie i utrudnia wprowadzenie myśli ucznia w dziedzinę matematyki i jej metod. Jest to zresztą specyficzna trudność nauczania matematyki, której nie znają, której nawet nie rozumieją dydaktycy innych przedmiotów. Obserwacje i systematyczne badania prowadzone w szkole ujawniają, że w rezultacie skrajnie poglądowego nauczania matematyki i przesadnej obawy przed jakąkolwiek formalizacją rzekomo niedostępną uczniowi (eksperymentalne nauczanie w różnych krajach obala już ten pewnik) przeciętny uczeń w ogóle nie umie się posługiwać definicją matematyczną, bo najczęściej odwołuje się do bardzo silnie powiązanego z danym terminem obrazu, a nie do tekstu definicji. Gdy tego obrazu brak, staje bezradny przed najprostszym problemem, którego rozwiązanie otrzymałby od razu, gdyby tylko zechciał i umiał zanalizować odpowiednią definicję.

Wszystkie te zagadnienia skupiają się dokoła podstawowego zagadnienia dydaktycznego: zachowania w nauczaniu właściwego stosunku między wnioskowaniem empirycznym, rozumowaniem intuicyjnym i rozumowaniem formalnym oraz wyznaczenia w procesie myślenia matematycznego ucznia każdemu z tych elementów odpowiedniej funkcji.

Dla uniknięcia nieporozumień przypominamy jeszcze raz krótko, w jakim sensie tych terminów będziemy używać. Będziemy mówić o **wnioskowaniu empirycznym** w dziedzinie matematyki na poziomie nauczania szkolnego w sytuacji, gdy uczeń formułuje hipotezę matematyczną na podstawie

1° obserwacji i doświadczenia w konkretnej fizycznej przestrzeni, które w rezultacie matematyzacji występujących tu stosunków opisuje używając terminów matematycznych, lub

2° indukcyjnych prób już w zakresie samej matematyki.

Rozumowanie ucznia potraktujemy jako **intuicyjne** w dziedzinie matematyki na poziomie szkolnym, jeżeli uczeń w toku rozwiązywania jakiegoś zagadnienia.

1° posługuje się przede wszystkim wyobraźnią, tj. obrazami pojęć, które rozważa, niezależnie od ich formalnych definicji i

2° przeprowadza skrótowe rozumowania oparte na oczywistych dlań przesłankach niezależnie od ich wywiedlności w ramach danego układu lub

3° formułuje hipotezę matematyczną opartą na dostrzeżonych analogiach, odpowiedniościach, odwzorowaniach, lub

4° uzasadnia swe wnioski nie zanalizowaną dokładniej rekurencją.

Wreszcie rozumowanie ucznia uznamy za **formalne** w dziedzinie matematyki na poziomie szkolnym, jeżeli uczeń

1° zdaje sobie sprawę z przyjętej podstawy dedukcji i

2° świadomie w toku rozwiązywania zagadnienia stara się każdy z kolejnych wniosków możliwie precyzyjnie wywieść z uznanych już poprzednio w danym układzie twierdzeń i definicji;

3° korzysta prawidłowo z definicji, a więc używa terminu definiowanego tylko w sensie nadanym mu przez tę definicję oraz rozumie, że nowy termin może wprowadzić do swych rozważań po wyjaśnieniu jego znaczenia tylko za pomocą terminów poprzednio już wprowadzonych i

4° korzysta prawidłowo z twierdzeń, to jest odrywa tezę dopiero po dokładnym skontrolowaniu, czy w danym przypadku są spełnione założenia.

Oczywiście uwzględniając poziom rozwoju matematycznej myśli ucznia, zdajemy sobie sprawę z tego, że granica między rozumowaniem intuicyjnym i formalnym nie zawsze w konkretnej sytuacji jest wyraźna. Najczęściej rozumowanie ucznia — zresztą i matematyka — jest intuicyjno-formalne. Decydująca jest tu jednak świadomość metodologiczna ucznia, to jest rozumienie — jeszcze może naiwe, ale już poprawne — dedukcji.

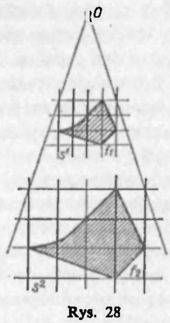
6.2.5. Jednym ze środków poprawnego harmonizowania tych różnych elementów myślenia matematycznego w nauczaniu matematyki jest „formalna legalizacja intuicyjnych rozumowań" uczniów. Rozumiemy przez to, że nauczyciel przyjmuje za podstawę dowodu lub rozwiązania jakiegoś problemu podany przez ucznia intuicyjny szkic, którego w tej formie nie można by uznać za rozwiązanie prawidłowe i wystarczająco ścisłe, ale które można przekształcić w rozumowanie poprawne i formalne w ramach danego układu materiału nauczania, precyzując wraz z uczniami użyte przez ich kolegę poglądowo tylko ujęte terminy, tłumacząc na język matematyki obrazowe ilustracje rysunkiem i gestem przedstawionego pomysłu uzupełniając w toku krytycznej dyskusji pominięte ogniwa dedukcji. Postąpimy tak, gdy np. uczeń powoła się na intuicyjnie tylko umotywowaną tezę, że rozważana funkcja rośnie nieograniczenie („i tak dalej" mówi uczeń, ilustrując to gestem ręki), lub gdy w nauce geometrii sugeruje, że jedną z figur można „nasunąć" na drugą, nie wskazując wektora przesunięcia i kierując się tylko wyobrażeniem tych figur itp.

Oczywiście nie każdy pomysł intuicyjny ucznia może być formalnie zalegalizowany w danym układzie materiału. Niemniej ilekroć to jest możliwe, powinno być przedmiotem wnikliwej uwagi nauczyciela i jednym ze środków stosowanej przezeń strategii dydaktycznej, mającej na celu wprowadzenie ucznia w matematyczną metodę. Postulat ten stawia nauczycielowi duże wymagania. Musi się on tak swobodnie poruszać w materiale nauczania, aby go pomysły uczniów nie zaskakiwały, aby umiał szybko ocenić ich wartość i odróżnić zgadywanie od rozumowania. Każda rozsądna propozycja ucznia powinna być dokładnie przedyskutowana. Niemożliwość „formalnej legalizacji" pomysłu ucznia może być też bardzo wnikliwie przez nauczyciela wykorzystana do wyjaśnienia mu mechanizmu dedukcji. Na przykład w kursie stereometrii uczeń proponuje wykonać konstrukcję płaszczyzny równoległej do danej płaszczyzny i przechodzącej przez dany punkt przez poprowadzenie przez ten punkt prostej prostopadłej do danej płaszczyzny i następnie przez skonstruowanie w danym punkcie płaszczyzny prostopadłej do tej prostej. Wszystko to jest „nielegalne" w danym momencie kursu. Nie zdefiniowano prostej prostopadłej do płaszczyzny, nie wprowadzono metrycznych aksjomatów, nie można w ogóle jeszcze przy przyjętej podstawie udowodnić twierdzenia, że wszystkie proste prostopadle do danej prostej w danym jej punkcie zawierają się w jednej płaszczyźnie itp. Dyskusja z uczniami zmierzająca do wyjaśnienia tej sytuacji jest bardzo instruktywna z punktu widzenia konsekwentnego i stopniowego wprowadzania ich w matematyczną metodę.

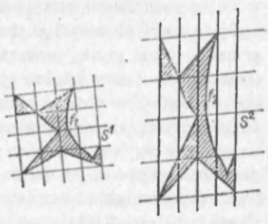
6.2.6. „Myślenie intuicyjne" — pisze słusznie J. Bruner — „opiera się zazwyczaj na doskonałej znajomości danej wiedzy i jej struktury, co pozwala myślącemu na dokonywanie przeskoków i korzystanie ze skrótów myślowych"[1]. Konsekwencje dydaktyczne tego oczywiście zgodnego z faktami twierdzenia są zupełnie jasne. Im lepiej uczeń opanował materiał nauczania nie mechanicznie, ale ze zrozumieniem jego wewnętrznej organizacji, tym bardziej sensowne i przydatne do „formalnej legalizacji" będą tutaj jego intuicyjne, skrótowe rozumowania, tym bardziej zharmonizowana ze strukturą przedmiotu będzie jego wyobraźnia matematyczna, tym mniej będzie konfliktów między tą wyobraźnią i rygorami dedukcji. Podkreślając każdy twórczy pomysł ucznia, niezależnie od jego przydatności, nauczyciel powinien niemniej uświadamiać uczniom stale, że pomysł pojawia się najczęściej nie „z natchnienia", ale na tle gruntownej analizy danej sytuacji problemowej i głębokiej, solidnej wiedzy.

6.2.7. Na rozwój zdolności do skrótowego, intuicyjnego, ale nadającego się do formalnej legalizacji rozumowania wpływa dobór definicji i twierdzeń. Ważne są w szczególności takie rozumowania, których plan jest bardzo prosty i które uczeń może ująć „jednym chwytem myśli". Tu właśnie dokonuje się szczególnie łatwo przejście od intuicyjnego rozumowania do precyzyjnej dedukcji.

Rozwiązujemy np. zagadnienie: figura f_1 ma pole, figura f_2 jest podobna do f_1 w skali k. Czy f_2 ma pole? Jaki jest stosunek tych pól? Stwierdzamy z uczniami, że wystarczy rozważyć przypadek, gdy figury f_1 i f_2 są jednokładne. Zgodnie z definicją pola wymierzamy f_1 ciągiem sieci S^1, figurę f_2 wymierzamy ciągiem sieci S^2, powstałym z S^1 przez tę samą jednokładność (rys. 28). Odpowiedź intuicyjna uczniów na postawione pytanie jest natychmiastowa. Legalizujemy ją następnie dokładnym rozumowaniem. W dalszym ciągu po wprowadzeniu pojęcia przekształcenia afinicznego jako wzajemnie jednoznacznego przekształcenia płaszczyzny, zachowującego współliniowość, możemy sformułować podobne pytanie.



Rys. 28



Rys. 29

[1] J. S. Bruner, op. cit., s. 61.

Sugerujemy postępowanie analogiczne do tego, które zastosowaliśmy poprzednio (rys. 29). Figurę f_1 wymierzamy tym razem za pomocą ciągu sieci kwadratowych, figurę f_2 za pomocą ciągu obrazów tych sieci w danym przekształceniu afinicznym, a więc za pomocą ciągu sieci równoległobocznych. Odpowiedź intuicyjna uczniów jest natychmiastowa. Stosunek pola f_2 do pola f_1 jest równy stosunkowi pól równoległobocznego „oczka" sieci drugiej i odpowiedniego „oczka" kwadratowego sieci pierwszej. Ten stosunek jest więc stałą charakterystyczną dla danego przekształcenia afinicznego. Uczniowie legalizują to spostrzeżenie dokładnym rozumowaniem. Stwierdzają także, że udowodnione twierdzenie obejmuje jako szczególny przypadek twierdzenie o stosunku pól figur podobnych i twierdzenie o stosunku pól figur przystających.

Dydaktyczne zagadnienia „dowodu jednym chwytem myśli" wiążą się bezpośrednio z następującym postulatem: należy dążyć do tego, aby dowód czynił twierdzenie nieoczywiste — oczywistym. Jest to bardzo ważne dla rozwoju intuicji ucznia. Jest to równocześnie argument przeciw tylko informacyjnemu traktowaniu matematyki szkolnej. Można by podawać uczniom twierdzenia matematyczne jako fakty już udowodnione tak, jak to czyni geograf, przyrodnik, czy fizyk doświadczalny. Nie robimy tego z wielu powodów. Chcemy oczywiście, aby uczniowie zapoznali się aktywnie z metodą matematyczną. Chcemy również, by uczniowie dobrze zrozumieli twierdzenia i na to obecnie zwracam szczególną uwagę. Dowód może bowiem odegrać ważną rolę zarówno formalną jak i intuicyjną; może być przeprowadzony w ten sposób, że uczeń po jego zakończeniu myśli: „tak jest rzeczywiście, to zostało logicznie udowodnione", ale nadal twierdzenie pozostaje dlań nieoczywiste, choć prawdziwe w sensie formalnym. „Widzę, ale nie wierzę" — Cantora — to właśnie taka sytuacja. Dowód może być również przeprowadzony tak, że uczeń po jego zakończeniu myśli: „to musi być tak, to jest oczywiste" i rozumie już twierdzenie inaczej. Twierdzenie o sumie kątów trójkąta nie jest oczywiste, staje się natomiast nie tylko formalnie prawdziwe na gruncie geometrii, ale także oczywiste w świetle klasycznego dowodu Euklidesa. Różne walory z tego punktu widzenia mają różne dowody twierdzenia Pitagorasa. Jedne (oparte np. na rozkładach) czynią je dla ucznia wizualnie oczywistym, inne (np. oparte na rachunku wektorowym) ukazują istotny sens algebraiczny tego twierdzenia, ale nie czynią go (na poziomie doświadczeń ucznia-niematematyka) oczywistym. Wybór dowodu powinien być więc — między innymi — podyktowany świadomym zamierzeniem dydaktycznym: bądź dążeniem do podkreślenia jego miejsca w formalnej strukturze, bądź do ukazania jego intuicyjnego sensu.

Ideałem byłyby dowody spełniające jeden i drugi warunek. Czasem warto podać różne dowody tego samego twierdzenia, uzupełniające się z tego punktu widzenia; np. zapoznanie ucznia z różnymi dowodami twierdzenia Pitagorasa oraz metodologiczne omówienie tych dowodów pogłębia zarówno formalne jak i intuicyjne rozumienie tego twierdzenia.

6.2.8. Zilustrujemy jeszcze postępowanie, które nazwaliśmy „legalizacją intuicji" na przykładzie dydaktycznego opracowania twierdzenia o indukcji matematycznej.

„Zasada indukcji" jest to aksjomat lub twierdzenie (w zależności od przyjętej aksjomatyki) odnoszące się do zbioru liczb całkowitych nieujemnych; możemy ją wypowiedzieć w różnych wersjach. Oznaczając przez N_p zbiór liczb całkowitych nieujemnych nie mniejszych od p, przez Z zbiór, przez $\Phi(x)$ warunek zdaniowy, zapiszemy „zasadę indukcji" w jednej postaci

a) $[p \in Z \text{ i } \bigwedge_{x \in N_p} x \in Z \Rightarrow (x+1) \in Z] \Rightarrow N_p \subset Z$

lub

b) $[\Phi(p) \text{ i } \bigwedge_{x \in N_p} \Phi(x) \Rightarrow \Phi(x+1)] \Rightarrow \bigwedge_{x \in N_p} \Phi(x)$.

Jak wiemy, twierdzenie to jest na gruncie aksjomatyki Peano równoważne twierdzeniu zwanemu „zasadą minimum": *każdy niepusty zbiór liczb całkowitych nieujemnych ma minimum.*

Opracowanie z uczniami twierdzenia o indukcji wymaga właściwego rozwiązania dwóch niełatwych zagadnień dydaktycznych:

1° Takiego przedstawienia treści tego twierdzenia, aby uczniowie zrozumieli jego strukturę logiczną i ujęli je jasno intuicyjnie.

2° Nauczenie uczniów poprawnego stosowania tego twierdzenia w różnych działach matematyki.

Zrozumienie treści twierdzenia o indukcji jest dla uczniów trudne przede wszystkim ze względu na logiczną strukturę tego twierdzenia. Założenie tego twierdzenia jest bowiem koniunkcją, której jeden człon ma postać zdania (p, Z, Φ ustalone) $p \in Z$ lub $\Phi(p)$, drugi ma postać zdania rozpoczynającego się od dużego kwantyfikatora, pod którym występuje implikacja:

$\bigwedge_{x \in N_p} x \in Z \Rightarrow (x+1) \in Z$ lub $\bigwedge_{x \in N_p} \Phi(x) \Rightarrow \Phi(x+1)$.

W tym skomplikowanym założeniu tkwi główna trudność, którą trzeba pokonać przez umiejętne ujęcie dydaktyczne. Postępowanie, które opiszę, wielokrotnie wypróbowane w praktyce szkolnej, może być przykładem takiego ujęcia.

Dla ułatwienia zrozumienia roli dwóch członów koniunkcji występujących w założeniu nadajemy im sugestywne, obrazowe nazwy: „zachodzi fakt początkowy" na $\Phi(p)$ i „zachodzi prawo przekazywania" na $\bigwedge_{x \in N_p} \Phi(x) \Rightarrow \Phi(x+1)$.

Wyjdziemy od fikcyjnego obrazowego przykładu. Wyobraźmy sobie nieskończony ciąg T_0, T_1, T_2, T_3, ... stacji telekomunikacyjnych skonstruowanych tak, że spełnione jest w nich prawo przekazywania, co znaczy w tym przypadku, że jeżeli jakaś stacja nada sygnał, to stacja bezpośrednio po niej następująca automatycznie już musi powtarzać ten sygnał.

Niechaj $W(x)$ znaczy, że stacja o numerze x nadała sygnał. Jak zapiszemy symbolicznie prawo przekazywania?

$$\bigwedge_{x \in N_0} W(x) \Rightarrow W(x+1).$$

Czy z wiadomości, że stacje zostały skonstruowane zgodnie z „prawem przekazywania" można wnosić już, że w ogóle którakolwiek ze stacji nadała choć raz jakiś sygnał? Oczywiście nie. Stacje mogą milczeć, choć są gotowe do nadawania sygnałów. A jeżeli wiadomo, że „zaszedł fakt $W(0)$" (co znaczy, że stacja T_0 nadała sygnał), co można stąd wnosić? Możemy być pewni, że każda ze stacji nadała ten sygnał.

Dlaczego? Bo działa „prawo przekazywania". Zapiszemy nasz wniosek symbolicznie $\bigwedge_{x \in N_0} W(x)$.

Analizujemy przeprowadzone rozumowanie. Jakie były przesłanki, na których oparliśmy wnioski? Pierwsza dotyczyła konstrukcji ciągu stacji, tj. „prawa przekazywania", druga wyrażała wiadomość dotyczącą „zajścia faktu początkowego":

1) $\bigwedge_{x \in N_0} W(x) \Rightarrow W(x+1)$,

2) $W(0)$.

Jak sformułowaliśmy wniosek?

$$\bigwedge_{x \in N_0} W(x).$$

Każda z przesłanek odegrała w naszym rozumowaniu istotną, ale inną rolę. Gdybyśmy mieli tylko wiadomość 2) i nie wiedzieli, że stacje działają zgodnie z „prawem przekazywania", to nie moglibyśmy wysnuć oczywiście naszego wniosku. Z samego faktu $W(0)$ wcale on nie wynika. Gdybyśmy mieli tylko wiadomość 1), również nie moglibyśmy wysnuć naszego wniosku. Wszystkie stacje gotowe są do przekazywania sygnału, ale do stwierdzenia, że wszystkie stacje nadają sygnał, jest nam konieczna informacja, że pierwsza go nadała.

Przyjrzyjmy się zapisowi naszego twierdzenia; $W(x)$ oznacza tu, że liczba całkowita nieujemna x spełnia pewien warunek (w naszym przykładzie „stacja o numerze x nadała sygnał"). Nie mówmy już o stacjach, myślmy o liczbach i pewnym warunku. Czytamy: Jeżeli 1) warunek W podlega prawu przekazywania w zbiorze liczb całkowitych nieujemnych i 2) liczba 0 spełnia ten warunek, to warunek W jest spełniony przez każdą liczbę całkowitą nieujemną.

Wypowiedziane zdanie wyraża pewną własność zbioru liczb całkowitych nieujemnych. Czy wydaje się ono wam intuicyjnie prawdziwe? Tak, bo według prawa przekazywania powinno być

$W(0) \Rightarrow W(1)$: ponieważ jest $W(0)$, więc musi być $W(1)$,

$W(1) \Rightarrow W(2)$: ponieważ jest $W(1)$, więc musi być $W(2)$,

$W(2) \Rightarrow W(3)$: ponieważ jest $W(2)$, więc musi być $W(3)$ itd.

Wprowadzamy nazwę dla tej podstawowej własności zbioru liczb całkowitych nieujemnych: „zasada indukcji zupełnej". Uogólnienie tak sformułowanej zasady indukcji przez zastąpienie zbioru N_0 przez zbiór N_p, dogodne w zastosowaniach, nie przedstawia już trudności.

Oczywiście nie trzeba się łudzić, że uczniowie po takim opracowaniu zrozumieli już zasadę indukcji. Rozumienie jest procesem, zmienia się, modyfikuje i pogłębia. Takie pogłębienie zasady indukcji osiągamy przez bardzo wnikliwe opracowanie z uczniami sposobu stosowania tego twierdzenia. Trzeba tu bardzo cierpliwie i systematycznie przyzwyczajać uczniów do tego, aby korzystali w rozumowaniach z zasady indukcji zupełnej tak, jak korzystają z każdego innego twierdzenia: dopiero po sprawdzeniu, że spełnione są założenia, można „oderwać tezę", co jest tu tym bardziej ważne, że samo twierdzenie ma skomplikowaną strukturę logiczną. Istotny moment dydaktyczny — sformalizowanie intuicji rekurencji — to właściwe przejście do formalizmu, które realizuje się przez „symboliczny opis" intuicyjnego ujęcia.

Pierwsze przykłady nie powinny być zbyt proste i banalne. Należy raczej zacząć od dowodu jakiegoś interesującego dla uczniów, bo praktycznie upraszczającego rachunki wzoru, np. wzoru na sumę kwadratów n kolejnych liczb naturalnych. Proponujemy dowód wzoru:

$$\bigwedge_{x\in N_1} 1^2+2^2+\ldots+x^2=\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}.$$

Wzór ma postać tezy występującej w „zasadzie indukcji"; zastosujemy to twierdzenie. W tym celu sprawdzimy, czy są spełnione jego założenia. Przed przystąpieniem do takiego sprawdzenia w dyskusji z uczniami precyzujemy wszystkie potrzebne do tego elementy.

Oznaczamy krótko sumę $1^2+2^2+\ldots+x^2$ przez s_x.

Jaki mamy tu warunek?

$$W(x) \Leftrightarrow s_x=\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}.$$

Jaką postać ma prawo przekazywania?

$$\bigwedge_{x\in N_1} s_x=\frac{x(x+1)(2x+1)}{6} \Rightarrow s_{x+1}=\frac{(x+1)(x+2)(2x+3)}{6}.$$

Nazwijmy to krótko prawem P.

Co znaczy tu „zajście faktu początkowego"?

$s(1)$, a więc $1^2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$. Oznaczmy krótko przez F tę równość.

Badamy, czy zachodzi prawo „przekazywania". Dla uproszczenia opuszczamy w zapisie kwantyfikator $\bigwedge_{x\in N_1}$, ale pamiętamy o nim w toku rozumowania (ciągle mamy przed oczyma zapisane prawo przekazywania P). Wykonujemy tak przekształcenie, aby otrzymać P.

$$1^2+2^2+\ldots+x^2=\frac{x(x+1)(2x+1)}{6},$$

$$1^2+2^2+\ldots+x^2+(x+1)^2=\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}+(x+1)^2,$$

$$1^2+2^2+\ldots+x^2+(x+1)^2=(x+1)\frac{2x^2+x+6x+6}{6},$$

$$1^2+2^2+\ldots+x^2+(x+1)^2=(x+1)\frac{2x^2+7x+6}{6},$$

$$1^2+2^2+\ldots+x^2+(x+1)^2=(x+1)\frac{(x+2)(2x+3)}{6}.$$

Udowodniliśmy P, prawo przekazywania zachodzi.

Sprawdzamy F:

$$1^2 = 1; \quad \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1,$$

zatem stwierdzamy „zajście faktu początkowego".

Założenia twierdzenia o indukcji są spełnione, dla warunku $W(x)$ i $p=1$. Zatem można być pewnym, że jest prawdą:

$$\bigwedge_{x\in N_1} W(x),$$

a więc w rozważanym przypadku:

$$\bigwedge_{x\in N_1} 1^2+2^2+\ldots+x^2 = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6};$$

wzór jest prawdziwy.

Oczywiście, w miarę utrwalania się w myśli uczniów rozumowania tego typu i nabywania przez nich w tym wprawy, drobiazgowe i dokładne rozważania początkowe będą coraz to mniej potrzebne. Nie należy uczniów nudzić zbytnim formalizmem. Niemniej w początkowym stadium taka analiza jest konieczna.

Warto byłoby również zastosować tu „metodę kontrastowania" dla uwypuklenia roli przesłanek twierdzenia o indukcji, które zilustrowano poprzednio intuicyjnie na przykładzie fikcyjnego modelu ciągu stacji telekomunikacyjnych. Proponujemy uczniom dowód wzoru:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{n+1}$$

i sugerujemy rozpoczęcie sprawdzenia od „prawa przekazywania", a więc od twierdzenia: Dla każdej liczby naturalnej n

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n+3}{n+2}.$$

Uczniowie rozumują:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{n+1},$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n+1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n+3}{n+2}$$ (po odpowiednich przekształceniach). Nasze „stacje" mają potrzebną strukturę. Prawo przekazywania zachodzi. Przystępujemy do sprawdzenia „zajścia faktu początkowego".

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}; \quad \frac{2\cdot 1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}\neq\frac{3}{2}$$

Prawo przekazywania zachodzi, ale dla $n=1$ wzór jest fałszywy. Jest w nim jakaś pomyłka; może np. dopiero począwszy od jakiejś innej liczby p wzór będzie prawdziwy?

Nauczyciel sugeruje następujące rozumowanie:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{p(p+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+$$

$$+\ldots+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)=1-\frac{1}{p+1}=\frac{p}{p+1}.$$

Ale $\frac{p}{p+1}\neq\frac{2p+1}{p+1}$ dla każdej liczby naturalnej p.

Podany wzór nie jest spełniony przez żadną liczbę naturalną, choć „prawo przekazywania" dla tego wzoru zostało udowodnione.

Przykład ten może być wykorzystany do uwypuklenia hipotetyczno-dedukcyjnego, formalnego sensu twierdzenia matematycznego: założenie jak i teza „prawa przekazywania" są tu zawsze (dla każdej naturalnej liczby) fałszywe. „Prawo" jest niemniej prawdziwe.

Powracamy jeszcze raz do naszego modelu stacji telekomunikacyjnych. Nawet gdyby było wiadomo, że $W(x)$ dla każdego x jest fałszywe (sygnału nie nadaje żadna stacja), to $\bigwedge_{x\in N} W(x)\Rightarrow W(x+1)$, tj. „prawo przekazywania", pozostaje prawdziwe[1].

Na zakończenie naszych rozważań na temat „legalizacji intuicji rekurencji" warto porównać z tego punktu widzenia „zasadę indukcji" z „zasadą minimum", a to ze względu na możliwe trudności:

1° w rozumieniu przez uczniów treści i struktury twierdzenia,

2° w stosowaniu tego twierdzenia w rozumowaniach.

---

[1] Wzór $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$, otrzymaliśmy — wydawałoby się — nie stosując zasady indukcji.

Oczywiście jest to tylko pozorne ominięcie tej zasady. Rozumowanie z „użyciem kropek" jest bowiem rozumowaniem tylko intuicyjnym; rozumując ściśle należałoby użyć symbolu Σ:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{i}=\frac{1}{1}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

W toku tego rachunku stosowaliśmy pewne operacje na symbolu Σ. Symbol ten definiuje się rekurencyjnie:

$$\sum_{i=1}^{1}\Phi(i)=\Phi(1) \quad \text{oraz dla} \quad n>1 \; \sum_{i=1}^{n}\Phi(i)=\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(i)+\Phi(n),$$

zaś poprawności wykonywanych operacji dowodzi się właśnie na podstawie „zasady indukcji".

Jeżeli chodzi o zagadnienie pierwsze, „zasada indukcji" wiąże się niewątpliwie z dużo większymi trudnościami niż „zasada minimum", której sformułowanie jest o wiele prostsze.

Twierdzenie o indukcji ma podkład intuicyjny, ale przejście od tego intuicyjnego źródła do poprawnej wypowiedzi twierdzenia wymaga głębszego opracowania dydaktycznego. Twierdzenie: „każdy niepusty zbiór liczb całkowitych nieujemnych ma minimum" jest dla uczniów zupełnie oczywiste, zaś samo zdanie — o wiele dla nich formalnie prostsze (jest to zresztą uproszczenie formalnie pozorne). Czy któraś z tych zasad powoduje większe trudności w zastosowaniach?

Przyjrzyjmy się np. dla porównania, jak przebiegałoby rozumowanie w przypadku rozważanego już poprzednio wzoru na sumę kwadratów, gdybyśmy je chcieli oprzeć na „zasadzie minimum". Rozumujemy np. tak: $1^2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$ zatem wzór dla $n=1$ jest prawdziwy. Przypuśćmy, że są takie liczby naturalne, dla których ten wzór nie jest prawdziwy. Zbiór wszystkich takich liczb ma minimum. To minimum jest liczbą większą od 1, możemy więc je oznaczyć $p+1$, gdzie p jest liczbą naturalną.

$$1^2+2^2+\ldots+(p+1)^2\neq\frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$$

i

$$1^2+2^2+\ldots+p^2=\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

Jednakże

$$1^2+2^2+\ldots+(p+1)^2=1^2+2^2+\ldots+p^2+(p+1)^2=$$

$$=\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}+(p+1)^2=\frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6},$$

co jest sprzeczne z naszym przypuszczeniem. Zatem dany wzór jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej.

Zauważmy, że w istocie rzeczy różnica między przedstawionym poprzednio tokiem rozumowania z zastosowaniem „zasady indukcji" i tokiem rozumowania opartego na „zasadzie minimum" polega tylko na tym, że pierwszy dowód był „dowodem wprost", drugi — „dowodem nie wprost". Wykonywane przekształcenia są takie same.

Nasuwa się zagadnienie dydaktyczne: którą z dwóch „zasad" należałoby wprowadzić do nauczania. Wydaje się, że mniej trudności mieliby uczniowie do pokonania przy „zasadzie minimum". Trzeba byłoby jednak tę hipotezę sprawdzić eksperymentalnie. Ale nawet gdyby ta hipoteza okazała się słuszna, należałoby rozważyć, czy z punktu widzenia rozwoju matematycznej myśli ucznia, pokonanie trudności związanych z logiczną strukturą „zasady indukcji" nie byłoby właśnie bardzo kształcące. Zagadnienie jest otwarte i warte badania. Opracowanie twierdzenia o indukcji jest typowym problemem dydaktycznym zharmonizowania intuicji i formalnych aspektów w nauczaniu.