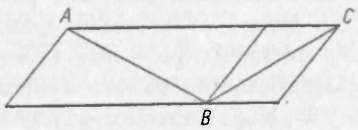
ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XI (1969)

Zofia Krygowska (Kraków)

Na marginesie artykułu B. L. van der Waerdena „Klasyczna i nowoczesna aksjomatyka"

1. B. L. van der Waerden charakteryzując klasyczną koncepcję dedukcyjnej geometrii podkreślił szczególnie jej dydaktyczną motywację. Ponieważ ta sama koncepcja była i jest krytykowana właśnie ze względów dydaktycznych, sądzę, że może warto i to inne stanowisko wyjaśnic i umotywować.

Klasyczne ujęcie geometrii dedukcyjnej jako przedmiotu nauczania prowadziło do licznych nieporozumień pedagogicznych i metodologicznych, co znajdowało swój wyraz w uporczywym poszukiwaniu przez metodyków sposobów przekonania ucznia o „potrzebie dowodzenia" w geometrii. Miejsce, jakie przyznawało się temu zagadnieniu w różnych opracowaniach metodycznych, i waga, jaką się jemu przypisywało, świadczą o jakimś głębokim nieporozumieniu zmieniającym to, co jest naturalne dla matematyka, w sztuczną dla ucznia i nieuzasadnioną metodę. Jeszcze wyraźniej występuje to nieporozumienie, gdy głębiej wnikniemy w „recepty" dydaktyczne, mające na celu przekonanie ucznia o „potrzebie dowodzenia". Wymienię tu tylko kilka dla przykładu. Wyróżnić możemy wśród nich trzy podstawowe grupy.



Rys. 1

Recepty pierwszego rodzaju, niezależnie od założeń filozoficznych ich autorów — co nam mówi wiele — zalecają zachwianie zaufania ucznia do doświadczenia i obserwacji w geometrii i stałe podkreślanie „wyższości rozumowania nad doświadczeniem". Ta argumentacja jest oczywiście tylko wybiegiem dydaktycznym. Należą tu na przykład następujące zalecenia:

1. Pokazać uczniowi możliwość złudzeń optycznych. Uczeń obserwuje rysunek 1 i stwierdza: odcinek AB jest większy od odcinka BC. Następnie mierzy te odcinki i stwierdza, że ich długości są równe. Autorzy „recepty złudzeń" konkludują: oto sposób przekonania ucznia o wyższości rozumowania nad obserwacją. Jest to oczywiście zupełnie fałszywy

wybieg. Uczeń prawidłowo myślący powinien stąd jedynie wysnuć wniosek: nie można ufać tylko obserwacji wizualnej rysunku, trzeba ją kontrolować innymi sposobami, na przykład pomiarem. Jakiż związek ma ta sytuacja z dowodzeniem?

2. Inny przykład uporczywie powtarzający się w zaleceniach dydaktycznych — to skonfrontowanie ucznia z tzw. pozornymi sofizmatami. Rysuje się trójkąt ABC nierównoramienny, symetralną AB i dwusieczną kąta ACB tak, że na naszkicowanej figurze te proste przecinają się wewnątrz trójkąta. Stąd łatwo już wysnuwa się wniosek, że trójkąt ABC wbrew założeniu musi być równoramienny, a więc, że każdy trójkąt jest równoramienny. Konkluduje się: rysunek wprowadził nas w błąd, bowiem wskazane proste „w rzeczywistości matematycznej" nie przecinają się wewnątrz trójkąta nierównoramiennego. Nie można ufać obserwacji rysunku. Należy rozumować. To wyjaśnienie jest oczywistym nonsensem. Rozsądny i myślący uczeń może odpowiedzieć: dlaczego rysowaliśmy niedokładnie? Właśnie, gdybym rysunek wykonał dokładnie, nie wprowadziłby on mnie w błąd. Stąd tylko jeden wniosek: rozwiązując zadania geometryczne trzeba wykonywać rysunki starannie. Ale co to ma wspólnego z problemem dowodzenia?

3. Inne zalecenia pierwszej grupy podkreślają „słabość doświadczenia": nie można twierdzenia sprawdzić „na wszystkich możliwych figurach", mierzenie prowadzi tylko do rezultatów przybliżonych, konstrukcje graficzne są zawsze opatrzone pewnym błędem, itp. Oto nowy fałszywy wybieg! Przecież, gdyby metoda empiryczna wymagała sprawdzania hipotezy we wszystkich możliwych przypadkach, gdyby nie można było dokonywać uogólnień na podstawie przybliżonych pomiarów, nauki empiryczne w ogóle nie rozwijałyby się. Jest to wybieg nie tylko fałszywy, ale i szkodliwy, ponieważ podważa zaufanie ucznia do metod empirycznych, co jest chyba nonsensem. Jest to także tylko niezręczny wybieg, ponieważ nie wyjaśnia istoty rzeczy, że przedmiotem matematyki jest abstrakcyjny schemat, który ze względu na swój charakter nie może być badany empirycznie.

Recepty drugiej grupy już wyraźnie wskazują na ten przedmiot. Mówi się tu o „figurach narysowanych" przeciwstawiając je „figurom pomyślanym" i o „konstrukcjach konkretnych" przeciwstawiając je „konstrukcjom pomyślanym". Przedmiotem geometrii są „figury pomyślane" i „konstrukcje pomyślane", które nie mogą być badane metodą doświadczalną. Trzeba rozumować, a nie mierzyć na przykład, bo „figury pomyślanej" nie można wymierzyć przyrządami tak, jak „figurę wykreśloną". Przy tej argumentacji uczeń zaczyna rozumieć potrzebę weryfikacji „przez rozumowanie". Ale trudności nie są tu usunięte. „Sprawdzić", „przekonać się", to znaczy sprowadzić to, co nie jest intuicyjnie oczywiste, do tego, co jest oczywiste. Dlaczego akurat do tych „pewników", które wyróżniono na wstępie geometrii, gdy inne twierdzenia są równie oczywiste, jak te pewniki?

Te wątpliwości ucznia starają się usunąć zalecenia trzeciej grupy, podkreślające względność oczywistości. Nauczyciel jest z początku przeciwnikiem „nie wierzącym" w to, co dla ucznia jest oczywiste. Z czasem uczniowie włączają się czynnie w ten spór intelektualny. Niektórzy z nich zaczynają brać w nim udział z wielkim zainteresowaniem i sami stają się z kolei „niedowiarkami" wobec swych kolegów, „szukającymi dziury na całym". Powoli i ten, kto atakuje, i ten, kto się broni, sam zaczyna być dla siebie przeciwnikiem. Dyskusja z innymi interioryzuje się w dyskusję wewnętrzną, uczeń rozumuje, przyzwyczaja się do metody. Ale nie należy ulegać złudzeniom. To przyzwyczajenie u wielu uczniów nie jest jeszcze rozumieniem metody dedukcyjnej. Nasze badania przekonują nas o tym w sposób uderzający. Uczeń dowodzi twierdzeń, ale na pytanie, dlaczego tak robi, dlaczego stara się dane twierdzenie weryfikować na podstawie poprzednio przyjętych lub udowodnionych — odpowiada „bo tego wymaga program szkolny". Uczeń ma dwa kryteria „prawdy" w geometrii, swoje własne, naturalne, oraz narzucone „przez program szkolny".

Sądzę, że właśnie klasyczna koncepcja metody dedukcyjnej jest powodem tych wszystkich nieporozumień. Van der Waerden sądzi, że jej zaletą jest to, że wymienia się na wstępie tylko niektóre „pewniki", inne przyjmuje się milcząco. Odwołuje się przy tym do *Elementów Euklidesa*. Nie sądzę, aby Euklides pomijał przesłanki dotyczące na przykład porządku i ciągłości celowo, bardzo starannie ujawniając inne, równie „oczywiste". Myślę, że po prostu nie zauważył luk w swych rozumowaniach, przecież — pomijając te luki — bardzo precyzyjnych. Jak można wyjaśnić uczniowi sens „pojęcia podstawowego" i sens „pewnika", jeżeli są „pojęcia podstawowe oficjalne" i „pojęcia podstawowe zakonspirowane" oraz „pewniki oficjalne" i „pewniki zakonspirowane"? Prowadzi to do jakiejś metafizycznej świętości niektórych „pewników", do ich hierarchii uświęconej tradycją.

2. Analiza różnych tradycyjnych podręczników geometrii pozwala nam na wyróżnienie pewnych typów wyjaśnień dotyczących „pojęcia pierwotnego" i „pewnika" (aksjomatu), podawanych uczniom. Cytuję poniżej takie właśnie typowe wyjaśnienia.

I. *Oczywistość a priori.*

(a) Pojęcia pierwotne — to pojęcia całkowicie jasne, których nie możemy zdefiniować, aksjomaty — to twierdzenia oczywiste, których nie możemy udowodnić.

(b) Pojęcia pierwotne — to pojęcia tak proste, że nie wymagają żadnej definicji, aksjomaty — to twierdzenia tak oczywiste, że nie wymagają żadnego dowodu.

II. *Oczywistość oparta na doświadczeniu.*

Pojęcia pierwotne — to pojęcia odbijające pewne przedmioty istniejące w przestrzeni fizycznej, aksjomaty — to twierdzenia bardzo proste, oparte na obserwacjach, tak często powtarzanych, że wryły się w umyśle silniej niż inne.

III. *Metoda i porządek logiczny.* Nie można wyjaśnić sensu jakiegoś pojęcia bez odwołania się do innych pojęć. Nie można udowodnić żadnego twierdzenia bez odwołania się do innych twierdzeń. Ażeby uniknąć „regressum ad infinitum" albo błędnego koła, trzeba przyjąć pewne pojęcia bez definicji, jako podstawowe, oraz pewne twierdzenia bez dowodu, jako aksjomaty. Jako zasady wyboru wskazuje się najczęściej: szczególną oczywistość, rzadziej — szczególną prostotę i dogodność w rozwijaniu teorii, czasem wraca się do koncepcji szczególnej, apriorycznej prostoty i jasności.

W niektórych nowszych, choć ciągle jeszcze tradycyjnych, podręcznikach pojawiają się uwagi i wyjaśnienia typu:

IV. *Definicja uwikłana.*

(a) Aksjomaty — to twierdzenia przyjęte bez dowodu, wyrażające charakterystyczne własności pojęć podstawowych, o których nic innego nie wiemy.

(b) Aksjomaty — najważniejsze informacje, bez których nie byłoby możliwe posługiwanie się pojęciami pierwotnymi.

Powyższe wyjaśnienia odzwierciedlają niewątpliwie różne etapy rozwoju pojęcia metody aksjomatycznej. W interpretacji I odbija się idealistyczna koncepcja Proklosa, w interpretacji II realistyczna koncepcja Pascha. Według doktryny Proklosa, aksjomaty i postulaty Euklidesa są bardziej jasne niż twierdzenia z nich dedukowane pozbawione tej jasności i „bezpośredniego wglądu". Dwa tysiące lat po rozważaniach Proklosa, M. Pasch tak charakteryzuje pojęcia pierwotne: „Pojęć pierwotnych nie będziemy definiować, żadne wyjaśnienie nie może zastąpić tego środka zrozumienia tych pojęć prostych i niesprowadzalnych do innych pojęć, jakim jest wskazanie na odpowiednie przedmioty materialne" (1). O aksjomatach mówi Pasch: „Podstawowe twierdzenia opierają się na obserwacjach, które powtarzane bezustannie głębiej się utrwaliły niż inne obserwacje" (2). O pewności matematycznej: „Doskonałość dowodów, przez które twierdzenia są sprowadzane do twierdzeń podstawowych, wraz z oczywistością twierdzeń podstawowych, która powinna

(1) M. Pasch, M. Dehn. *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Springer, Berlin 1926, str. 15.

(2) Op. cit. str. 16.

być zagwarantowana prostymi doświadczeniami, nadaje matematyce charakter najwyższej niezawodności, którą jej się przyznaje" ([3]).

Te dwie koncepcje odbijały się i odbijają jeszcze w podręcznikach szkolnych. Zarówno jednak „idealistyczna oczywistość" Proklosa, jak i „realistyczna oczywistość" Pascha, jako podstawa nauczania geometrii dedukcyjnej prowadzą do głębokich nieporozumień pojęciowych uczniów i nie wyjaśniają rygorów dedukcji. Dla ucznia większość dowodzonych twierdzeń geometrycznych nie jest mniej oczywista niż „pewniki" (jak nasze badania wykazują niektóre „twierdzenia" są dla uczniów bardziej oczywiste niż „pewniki"). „Pewniki" nie są dla ucznia bardziej potwierdzone przez doświadczenie niż wiele innych twierdzeń. W tej sytuacji wyjaśnienie metody aksjomatycznej oparte na „oczywistości" — obojętne czy w interpretacji idealistycznej, czy realistycznej — nie może być dla ucznia wystarczające. Jest to zresztą wyjaśnienie również niezadowalające z punktu widzenia nauki. Naiwna jeszcze i uproszczona, ale bardziej nowoczesna interpretacja aksjomatyki jako „definicyjnego opisu" pewnej struktury abstrahowanej z rzeczywistości, sprzyja bardziej ukształtowaniu właściwego stosunku doświadczenia i abstrakcji matematycznej w umyśle ucznia. Jest rzeczą jasną, że wychodzić musimy od obserwacji i doświadczeń przestrzennych ucznia. W szkole podstawowej na tej bazie rozwija się geometrię jeszcze na wpół poglądowo. Przez schematyzację i ekstrapolację tych obserwacji i doświadczeń kształtujemy w myśli ucznia już abstrakcyjne pojęcia geometryczne. W aksjomatach geometrii w szkole średniej konstruujemy już i opisujemy na tej podstawie pewną strukturę, która staje się przedmiotem nauczania. Liczne doświadczenia wyraźnie przekonują nas, że uczniowie dobrze rozumieją ten definiujący charakter aksjomatyki właśnie wtedy, gdy zagadnienie jest jasno i bez niedomówień postawione. Na przykład świadomy i aktywny udział uczniów naszych klas eksperymentalnych w konstruowaniu aksjomatyki przestrzeni trójwymiarowej świadczy o tym w sposób nawet zaskakujący (jeden z uczniów zauważa na przykład: „te aksjomaty jeszcze nie wystarczają, płaszczyzna może być jeszcze ciągle «krzywa»"; ma na myśli wyidealizowany przez schematyzację i ekstrapolację konkretnych doświadczeń pewien wyobrażony model, który chce opisać formułując własności podstawowe). Po zakończeniu tak właśnie organizowanego procesu aksjomatyzacji uczeń wie, że ma badać to i tylko to, co zostało w aksjomatach „opisane", a więc że nie powinien odwoływać się do innych nie wyrażonych w aksjomatach własności. Rozumowaniu towarzyszą oczywiście obrazy, konkretyzuje się je na rysunkach i modelach przestrzennych, doświadczenia i obserwacje sugerują pewne hipotezy, ale ostatecznie świadomie badamy tylko tę

([3]) Op. cit. str. 92.

strukturę, którą postanowiliśmy badać, formułując jej definicję aksjomatyczną (4).

Nie chcąc zbyt wiele miejsca zająć mym głosem w dyskusji, nie będę już dokładniej omawiać różnicy między tym ujęciem i cytowanymi wyżej wyjaśnieniami III i IV. Podkreślę tylko, że nie o porządek logiczny a posteriori nam chodzi i nie o definicję implicite. W tej ostatniej koncepcji mówi się o „przedmiotach", o których nic więcej nie wiemy poza tym, o czym mówią aksjomaty. Uczeń się na to nie zgodzi, ponieważ rozwiązując swoje zadanie geometryczne rysuje i konstruuje modele, posługuje się wyobraźnią, w której „widzi" różne utwory i ich stosunki. W aksjomatach wyraża tylko część tej poglądowej wiedzy, opisuje tylko jedną z wielu możliwych do opisania struktur przestrzeni i nią ma się zgodnie z postawionym mu zadaniem zajmować. Nie jest to zatem tylko formalna definicja a priori, jak na przykład definicja przestrzeni niearchimedesowskiej, powstała przez odrzucenie z aksjomatyki Hilberta jednego z aksjomatów ciągłości. Natomiast jest to ujęcie, stanowiące pomost między klasycznym i nowoczesnym rozumieniem metody aksjomatycznej: z jednej strony geneza aksjomatyki w sensie klasycznego realizmu, z drugiej jej rozumienie jako definicji pewnej struktury w sensie nowoczesnym. Jest to definicja explicite pewnej struktury — a nie implicite pewnych obiektów.

Zalecana przez van der Waerdena koncepcja geometrii jest w istocie rzeczy realizowana — i słusznie — w naszej szkole podstawowej. Jest to organizacja oparta na lokalnej dedukcji, na wyraźnym formułowaniu pewnych twierdzeń podstawowych i przemycaniu milczącym innych, na dowodzeniu tylko niektórych twierdzeń. W szkole średniej mamy więc dwie drogi do wyboru: albo poprzestać na wiedzy geometrycznej zdobytej przez ucznia w szkole podstawowej (zasób wiadomości i sprawności określony programem tej szkoły jest praktycznie wystarczający) i do geometrii rozumianej „mode geometrico" już w liceum nie wracać, albo ująć naukę geometrii w liceum inaczej, z uwypukleniem przede wszystkim metody aksjomatycznej z jej trzema zasadniczymi fazami: aksjomatyzacji (ze świadomym udziałem ucznia), dedukcji, interpretacji i zastosowania. Za wyborem jednego lub drugiego rozwiązania programowego przemawiają również poważne argumenty. Jeżeli wybieramy drugie, trzeba przede wszystkim unikać oszukiwania ucznia przez różne fałszywe wybiegi dydaktyczne. J. Dieudonné powiedział kiedyś, że nie może zrozumieć, dlaczego definicja poprawnie skonstruowana ma być dla ucznia mniej jasna niż definicja logicznie błędna. Myślę, że podobną uwagę może nasunąć dyskusja na temat metody aksjomatycznej w nauczaniu szkolnym.

(4) Dokładniej rozwinęłam tę myśl w artykule *Rozumowanie empiryczne, intuicyjne i formalne w nauczaniu matematyki*. Wiadom. Mat. 10 (1967), str. 49–91.