ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 7 (1987)

EMMA CASTELNUOVO
Rzym, Włochy

Umiejętność widzenia w matematyce
Kilka uwag dydaktycznych o intuicji i rozumowaniu dedukcyjnym

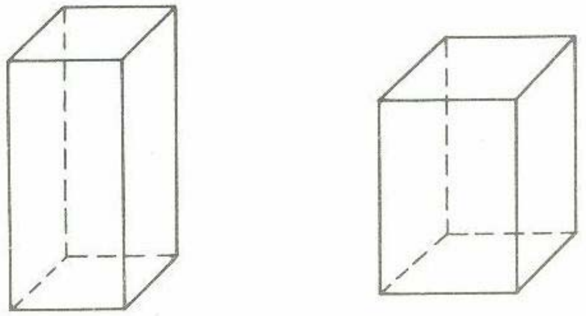
Chciałabym podczas swego wystąpienia opowiedzieć Państwu o kilku tematach opracowanych w klasie, o reakcjach uczniów i refleksjach, które mi się nasunęły.

Tematy, o których będę mówić, dotyczą pojęć objętości i pola powierzchni; Państwo zauważycie, że sposób ich potraktowania został zainspirowany ideami Galileusza i jego szkoły, w szczególności B. Cavalieriego i E. Torricellego.

Przenieśmy się do klasy; uczniowie mają po jedenaście, dwanaście, trzynaście i więcej lat; szkoła może się mieścić gdziekolwiek: we Włoszech, w Polsce, a także w Nigrze, gdzie miałam okazję uczyć.

Mówię: „Mam oto ten arkusz papieru; składając go wzdłuż na cztery równe części mogę budować pojemniki o podstawie kwadratowej. W zależności od kierunku składania otrzymuję dwa różne pojemniki: jeden jest wyższy i węższy, drugi niższy, lecz szerszy" (rys. 1). Dodaję, że gdy tylko są gotowe, doklejam dno - tak aby móc naprawdę wykorzystywać je jako pojemniki; można tam wsypać mąkę, ryż, proso, czy też piasek, jeśli się jest w Nigrze.

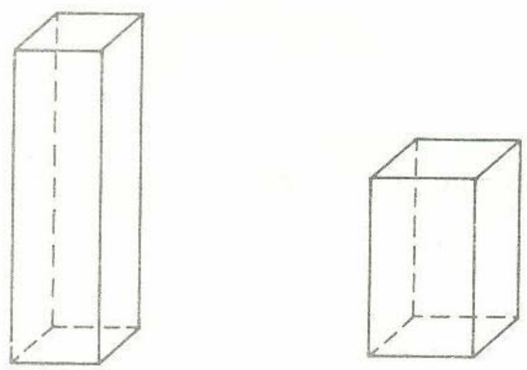
Pytam: „Czy oba te pojemniki pomieszczą jednakową ilość mąki?"



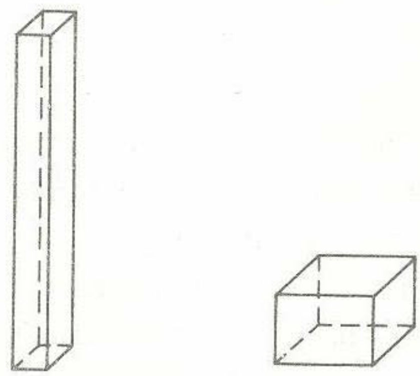
Rys. 1

Dostrzegam zaraz, obserwując wyraz oczu uczniów, że pytanie wydaje im się całkiem absurdalne; „oczywiste jest - mówią - że ilość mąki będzie taka sama, bo pojemniki wykonano z dwóch jednakowych arkuszy".

Wtedy - bez jakiegokolwiek komentarza - biorę inny arkusz tej samej długości co poprzedni, tylko węższy, i tworzę dwa inne równoległościany (rys.2) - nadal w taki sam sposób. „A teraz?" - pytam. Reakcja jest identyczna; uczniowie mówią: „To pewne, że mają one tę samą objętość, bo co się traci na wysokości, zyskuje się na podstawie, a więc..."



Rys.2



Rys.3

Powtarzam to jeszcze raz, wychodząc tym razem od bardzo wąskiego paska (rys.3). Uczniowie okazują pewne zakłopotanie; mówią: „W tym przypadku mimo wszystko chciałoby się powiedzieć, że objętości nie są równe".

A teraz opuśćmy naszą szkołę, a więc pewne specyficzne środowisko naturalne, wejdźmy do całkiem nowego środowiska. Moje ostatnie doświadczenia są wyjątkowe: spędziłam kilka dni wśród robotników z kopalni rtęci w środkowych Włoszech. Kopalnię tę zamknięto, a górnicy zostali zatrudnieni w innym charakterze: przy pracach metalurgicznych, w rolnictwie itp. Aby dla każdego z tych górników znaleźć sferę działalności najbardziej dla niego stosowną, żeby zbadać jego zainteresowania, kierownictwo kopalni zorganizowało kursy „oświatowe", a między nimi również kurs matematyki. Kilkakrotnie proszono mnie o przyjście na miejsce, aby udzielić rad młodemu nauczycielowi matematyki.

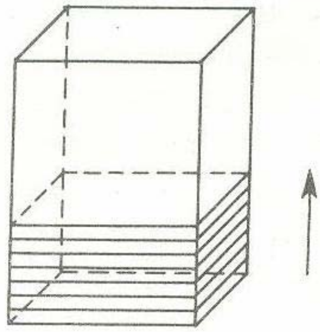
Muszę Państwu powiedzieć, że nigdy w mojej karierze nauczycielskiej nie doświadczyłam takiego zakłopotania i onieśmielenia. Pytałam sama siebie: jakim pytaniem, jakim tematem mogłabym zainteresować ludzi, którzy spędzili poważną część swego życia pod ziemią. Wydawało mi się, że każdy problem powinien wydać im się czymś zupełnie spoza realnej rzeczywistości. W końcu zdecydowałam się rozpocząć od problemu równoległościanów. Mieliśmy do czynienia z około setką górników, których podzielono na trzy grupy. Powtórzyłam więc temat trzy razy. A oto reakcje.

Przy pierwszej konstrukcji równoległościanów powiedzieli: „Wydaje się, że oba pojemniki powinny pomieścić tę samą ilość mąki". Przy drugiej konstrukcji część zareagowała natychmiast: „Widać teraz doskonale, że pojemniki nie mieszczą jednakowej ilości mąki. Pojemnik niski i szeroki mieści więcej, bo więcej waży!". Ktoś dodał: „A skoro w tym przypadku pojemniki nie mają tej samej objętości, to także w pierwszym przypadku nie mogły jej mieć, lecz na pierwszy rzut oka nie było to widoczne!".

Wywarło to na mnie silne wrażenie. Później, gdy wspominałam tę reakcję, przyszedł mi na myśl piękny dialog Galileusza: Galileusz pytał swoich współrozmówców, czy dwa walce otrzymane przez zwinięcie w dwóch różnych kierunkach jednakowego arkusza papieru mają jednakowe objętości, czy też nie; odpowiedź: „To pewne, że objętość jest taka sama, gdyż arkusze są jednakowe". A oto reakcja Galileusza: „Macie kłopoty z widzeniem tego jasno, natomiast lud nie myli się w tej sytuacji; wieśniacy dobrze wiedzą, że przy zbieraniu ziarna do worków zrobionych z jednakowych kawałków płótna lepiej opłaca się zwinąć płótno w kierunku ku mniejszej długości, ponieważ w tym wypadku worek jest pojemniejszy".

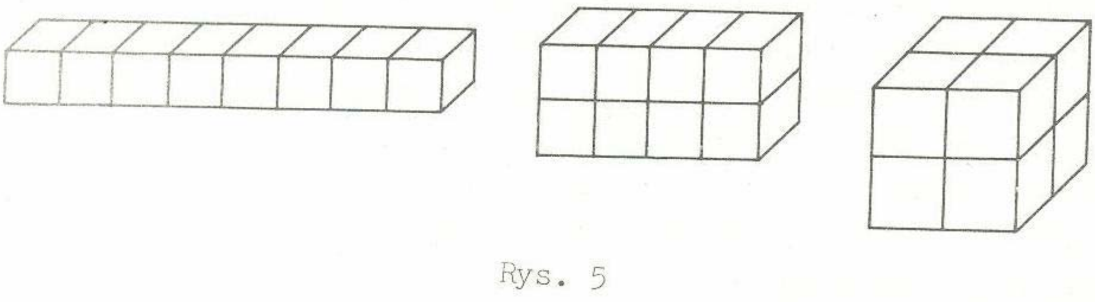
Rozważmy to: „Umiejętność widzenia w matematyce" bierze się również z manipulacji konkretem, z doświadczenia, które prowadzą w następstwie do idealizacji, uogólniania, krótko mówiąc - do uprawiania matematyki.

I rzeczywiście, powracając do górników zauważamy, że problem pojemników stał się również dla nich problemem matematycznym. Jeden z nich bowiem powiedział: „Ale jak w pierwszym przypadku sobie wytłumaczyć, że te dwie objętości nie są równe, gdyż oko nie jest w stanie tego uchwycić?". Pewien raczej prosty człowiek powiedział: „Ja to widzę tak: objętość tworzy się w ten sposób, że podstawa podnosi się wzdłuż wysokości, więc rozległość każdej warstwy jest ważniejsza niż grubość". W spostrzeżeniu tym zawarta jest idea Bonawentury Cavalieriego: objętość równoległościanu rozumiana jest jako podstawa, która „omiata" bryłę podnosząc się wzdłuż wysokości (rys.4).



Rys. 4

Przechodzę do innego problemu, nadal dotyczącego objętości i pól powierzchni. Mam 8 jednakowych sześcianów i chcę, wykorzystując wszystkie, budować równoległościany (rys.5). Wszystkie będą miały - oczywiście - taką samą objętość, to znaczy 8.



Rys. 5

Pytamy się: „Czy powierzchnia tych równoległościanów jest zawsze taka sama?". Aby się lepiej zrozumieć potrzebne jest uściślenie: należy myśleć o powierzchni zewnętrznej równoległościanu. Łatwo zauważyć, że nie we wszystkich przypadkach mamy tę samą liczbę „zewnętrznych" kwadratów; i zrozumiałe jest, że równoległościanem o minimalnym polu jest sześcian, bo właśnie sześcian ma powierzchnię „najbardziej skurczoną".

Trzeba zaznaczyć, że problem ten jest również ważny z punktu widzenia praktyki: jest to rzeczywisty problem rozważany w fabrykach pudełek: jaki kształt należy nadać równoległościanowi o danej objętości, biorąc pod uwagę oszczędność kartonu? Powinno się pudełku nadać kształt sześcianu.

A teraz poszerzymy ten problem. Naturalne jest rozważanie różnych kształtów, które może przyjmować powierzchnia związana z pewną objętością. Pytamy się: czy sześcian będzie miał ciągle własność najmniejszego pola? W jakim kierunku teraz zwrócimy nasze spojrzenie? Jaki materiał może być punktem oparcia dla naszych spostrzeżeń? Jeśli musimy otrzymywać różne kształty, to potrzebny jest materiał, którym można manipulować: na przykład bryła gliny. Mam więc w rękach bryłę gliny i mogę jej nadawać różne kształty, tworząc w ten sposób różne powierzchnie. Wśród tych powierzchni będzie również sześcian.

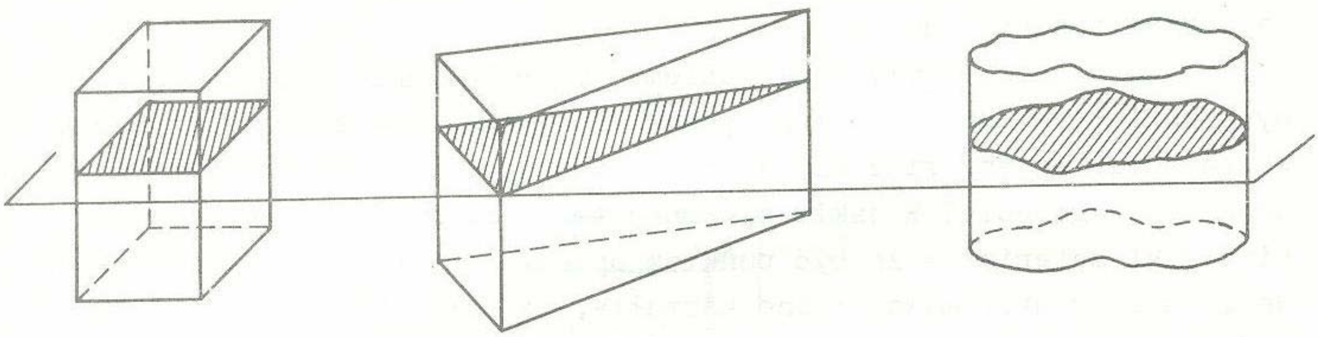
I oto ten sześcian z gliny przed chwilą zaczęto dowolnie ściskać, aby uzyskać powierzchnię jeszcze bardziej skurczoną. Ale w jaki sposób go ściskać? Zrozumiałe jest, że bryła ta musi być zgniatana obiema rękami przy zastosowaniu siły, która będzie działała raz w jednym kierunku (na przykład poziomym), to znów w kierunku do niego prostopadłym (a więc pionowym). Następnie znów trzeba będzie rozpocząć od ściskania w kierunku poziomym, później w kierunku pionowym i tak dalej. Modelując naszą bryłę gliny w ten „naturalny" sposób czujemy, że stopniowo otrzymujemy powierzchnię coraz bardziej regularną, a więc że zbliżamy się ku sferze.

Ale czy to prawda? Czy ta sfera ma - wśród równych objętości - najmniejsze pole? Jak pokazać w matematyczny sposób prawdziwość tego spostrzeżenia, tej fizycznej intuicji?

Jest dowód, który można przedstawić na różnych poziomach szkolnych i który, moim zdaniem, tłumaczy modelowanie „od ręki". Dowód ten opiera się na Zasadzie Cavalieriego: *Jeśli przekroje brył płaszczyznami równoległymi do danej są równoważne, to bryły te mają jednakowe objętości.*

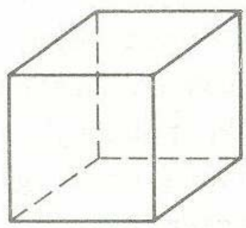
Zasada ta, której ilustrację widzimy na rys.6, jest od razu oczywista, jeśli myśli się o objętości jako o ilości materiału: ilość we wszystkich przypadkach jest - oczywiście - taka sama.

Wychodzi się zatem od sześcianu, a pokazuje się, że stopniowo, za pośrednictwem kolejnych przekształceń, dochodzi się do sfery równoważnej i o najmniejszym polu.

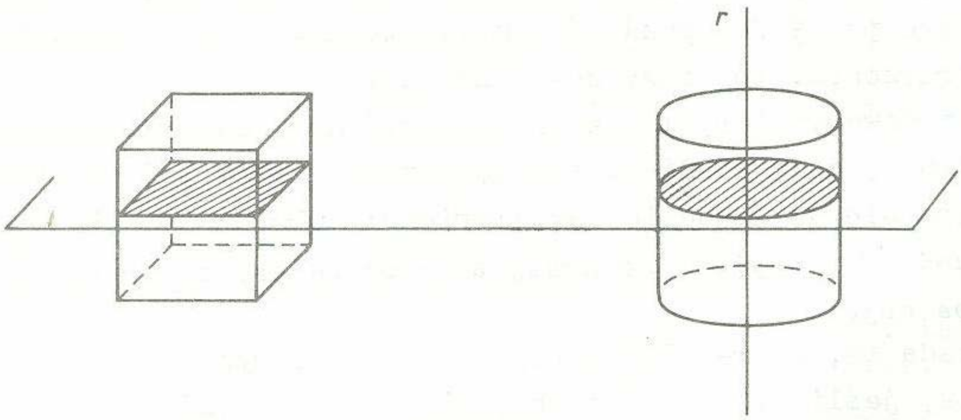


Rys. 6

Przekształcenia, którymi się operuje, mają wszystkie następujący charakter: przechodzi się od jednej do drugiej powierzchni w ten sposób, by ta nowa miała oś obrotu o pewnym kierunku. Wytłumaczę się zaraz.



Rys. 7

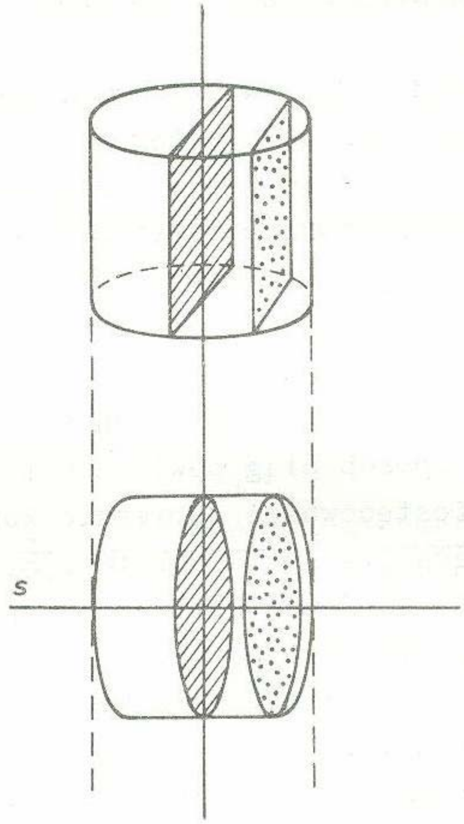


Rys. 8

Oto (rys.7) sześcian; sześcian nie ma osi obrotu. Przekształcimy go na powierzchnię, która ma oś obrotu o dowolnie wybranym kierunku, na przykład o kierunku *r* prostopadłym do podstawy.

Przecinamy sześcian (rys.8) płaszczyznami prostopadłymi do tego kierunku; otrzymujemy równe kwadraty. Zaś dla każdego kwadratu istnieje równoważne(1) koło o środku na prostej *r* .

Sześcian zastąpimy walcem o tej samej wysokości; a walec ten będzie miał taką samą objętość jak sześcian - zgodnie z Zasadą Cavalieriego. Ta operacja daje nam więc przejście od powierzchni bez osi obrotu - jak sześcian - do powierzchni równoważnej - walca, która ma oś obrotu. Co można powiedzieć o polu? Zastanówmy się: powierzchnia walca jest bez wątpienia mniejsza, ponieważ każdy kwadrat zastąpiono równoważnym kołem, które ma mniejszy obwód. (Uczniowie znają tę własność koła). Opieramy się tu na koncepcji „niepodzielnych krzywych" Torricellego: traktuje się powierzchnię walca jako utworzoną przez „nitki ułożone w kształcie koła".



Rys. 9

(1) Tj. o tym samym polu (*przyp. Redakcji*).

A teraz jeszcze jeden krok naprzód: wychodzi się od walca i przekształca się go na powierzchnię równoważną, która ma oś - niech to będzie *s* - prostopadłą do dawnej osi *r* (rys.9).

Postępuje się tu następująco: każdemu przekrojowi walca otrzymanemu przez płaszczyzny prostopadłe do *s* przyporządkowuje się równoważne koło o środku na prostej *s*.

Otóż tym razem przekroje walca nie są równe. Są to prostokąty, które mają jeden bok stale równy wysokości walca, a drugi bok - cięciwa koła podstawy - zmienia się od zera do długości maksymalnej, która odpowiada średnicy koła podstawy. Otrzymujemy powierzchnię obrotową względem *s*, utworzoną z kół, z których największe jest równoważne maksymalnemu prostokątowi walca. Można napisać równanie tej powierzchni, uwzględniając warunek, który kierował naszą konstrukcją: równoważność każdego koła i prostokąta, które znajdują się na tym samym poziomie.

Obserwacja prowadzi do stwierdzenia, że powierzchnia ma kształt „bardziej zaokrąglony" niż równoważny walec, zaś z matematycznego punktu widzenia pole tej powierzchni jest mniejsze niż pole powierzchni walca, ponieważ prostokąty zastąpiono równoważnymi kołami. Postępowanie będziemy kontynuować zawsze za pomocą tej samej metody: jako nową oś bierze się dawną prostą *r* prostopadłą do *s* i konstruuje się powierzchnię równoważną względem ostatniej; nowa powierzchnia będzie miała pole mniejsze niż poprzednia. I tak dalej.

Tworzymy w ten sposób ciąg powierzchni równoważnych o coraz mniejszych polach. Postępowanie dobiegnie końca, gdy tylko otrzymamy powierzchnię mającą jako osie obrotu i *r*, i *s* ; a ta powierzchnia może być tylko sferą, ponieważ sfera jest jedyną powierzchnią, która ma dwie prostopadłe osie obrotu.

I tu zatrzymujemy się: dobiegło końca zaokrąglanie kawałka gliny za pomocą matematyki...

I ja także zatrzymuję się, ale przed zakończeniem chciałabym uczynić kilka uwag natury dydaktycznej. Chciałabym powiedzieć, że ten dowód może dostarczać intuicji uczniom już w wieku 12-13 lat, i w tym wieku wpływa bardzo pobudzająco na wyobraźnię przestrzenną; można go przedstawiać uczniom w wieku 16-17 lat, a uczniowie pozostają pod wrażeniem siły metody, która przypomina modelowanie materiału. A bardzo ciekawe byłoby zaprezentowanie go w kursie uniwersyteckim, gdzie można byłoby z jednej strony przedstawić subtelne rozumowania na temat problemu istnienia minimum, a z drugiej strony badać, z punktu widzenia analitycznego i geometrycznego, różne powierzchnie, które otrzymuje się w kolejnych przekształceniach.

Chodzi zatem o temat, który daje różne możliwości badawcze. Moim zdaniem nigdy, także w przypadku kursu uniwersyteckiego, nie należy rezygnować z takiego intuicyjnego charakteru, takiej manipulacji konkretem (choćby tylko w wyobraźni), która nie hańbi, a która - przeciwnie - prowadzi w sposób naturalny do „umiejętności widzenia w matematyce".

O słuszności tych idei upewnia mnie to, że przed kilkoma laty do podobnego wniosku doszła A.Z. Krygowska:

- „Należy uczynić z matematyki elementarnej narzędzie szeroko wykorzystywane - czy to w nauce teoretycznej, czy to w działaniu praktycznym",

- „Należy zawsze uwydatniać w nauce matematyki aspekty ludzkie i uczuciowe oraz aspekty pracy twórczej, mianowicie piękno tworzenia i emocje poszukiwania".

Te „postulaty", jak je nazywam, przyswoiłam sobie jako coś własnego.

(Z francuskiego tłumaczyła A. Dęby)

The ability to see in mathematics
Some didactical remarks on intuition and deductive reasoning

Summary

The article exemplifies the dialectic of intuitive insight into a real situation and deductive reasoning concerning geometrical concepts used in its description. Intuition gives birth to hypotheses and questions, stimulates and orients deduction, developes "the ability to see in mathematics".